Lista área III

Formulação Hamiltoniana e Transformações Canônicas

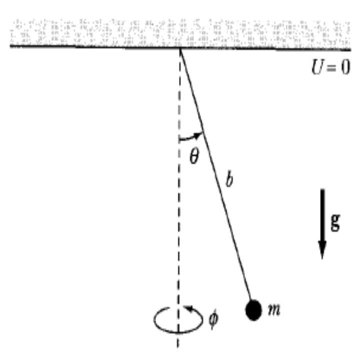
1. Considere uma partícula de massa *m* se movendo em um campo de força conservativo, cuja energia potencial é U. Usando coordenadas cartesianas retangulares obtenha a hamiltoniana para a partícula e mostre que as equações canônicas de movimento se reduzem as equações de Newton.

2. Uma mola sem massa de comprimento b e constante elástica k conecta duas partículas de massas m_1 e m_2. O sistema repousa sem atrito sobre uma mesa horizontal, e pode oscilar e rotar no plano.
(a) Determine as equações de movimento de Lagrange.
(b) Quais são os momentos canônicos associados a coordenadas cíclicas do sistema ?
(c) Determine as equações de movimento de Hamilton.

3. Uma partícula de massa m é atraída para um ponto com uma força de magnitude k/r^2, onde k é uma constante. Determine:
(a) A Hamiltoniana do sistema
(b) As equações de movimento de Hamilton
(c) Existe alguma quantidade conservada ? Justifique.

4. Uma partícula de massa m está vinculada a se mover na superfície de um cilindro de eixo z e raio R. Uma força central elástica $\vec{F} = -k\,\vec{r}$ atua sobre a partícula.
(a) Obtenha a função hamiltoniana do sistema.
(b) Obtenha a equações de movimento de Hamilton para a partícula. Mostre que a coordenada axial executa um movimento harmônico simples com freqüência $\omega^2 = k/m$.
(c) Existe alguma quantidade conservada ? Justifique.

5. Pelo método hamiltoniano determine as equações de movimento de um pêndulo esférico de massa *m* e comprimento *b*, como mostrado na figura. Combine o termo dependente



do momento canônico conjugado da variável ϕ, p_ϕ com o potencial V para definir o *potencial efetivo* $V_{ef}(\theta, p_\phi)$. Grafique V_{ef} como função de θ para diferentes valores de p_ϕ, incluindo $p_\phi = 0$. Discuta as diferenças entre os movimentos com $p_\phi = 0$ e $p_\phi \neq 0$. Discuta o caso limite do *pêndulo cônico*, $\theta = constante$.

6. Uma partícula de massa *m* se move em uma dimensão sob a influência de uma força

$$F(x,t) = \frac{k}{x^2} e^{-t/\tau}$$

onde k e τ são constantes positivas. Determine as funções lagrangiana e hamiltoniana. Compare a hamiltoniana com a energia total e discuta a conservação da energia no sistema.

7. Seja $\{q_i, p_i\}$ $i = 1, \ldots, n$ um conjunto de coordenadas do espaço de fase de um sistema físico. Definindo a matriz coluna de $2n$ elementos:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \cdots \\ q_n \\ p_1 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}, \text{ e a matriz } 2n \times 2n \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

onde **I** é a matriz identidade $n \times n$ e **O** é a matriz $n \times n$ com todos os elementos nulos, mostre que o parêntese de Lagrange $[u, v]_{(q,p)}$ se pode escrever em *notação simplética* na forma:

$$[u, v]_{\mathbf{z}} = \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial u}\right)^T \mathbf{J} \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial v}\right) \equiv \sum_{r,s=1}^{2n} \frac{\partial z_r}{\partial u} J_{rs} \frac{\partial z_s}{\partial v}$$

8. Definindo a matriz coluna de $2n$ elementos:

$$\zeta = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \cdots \\ Q_n \\ P_1 \\ \cdots \\ P_n \end{pmatrix},$$

a transformação de coordenadas $(q, p) \to (Q, P)$ se pode expressar, em notação simplética, na forma $\zeta = \zeta(\mathbf{z}, t)$. A partir dos resultados do problema anterior mostre que a condição de canonicidade de uma transformação de coordenadas em termos dos parênteses de Lagrange pode ser escrita na forma:

$$[z_r, z_s]_\zeta = J_{rs}$$

9. Mostre que $det\, \mathbf{J} = 1$.

10. Seja $\mathbf{M}$ a *matriz Jacobiana* da transformação $\zeta = \zeta(\mathbf{z}, t)$, com elementos dados por:

$$M_{rs} = \frac{\partial \zeta_r}{\partial z_s}, \qquad r, s = 1, \ldots, 2n.$$

Mostre que a condição de canonicidade pode ser escrita na forma:

$$[z_r, z_s]_\zeta = (M^T J M)_{rs}.$$

e, por tanto, a transformação $\zeta = \zeta(\mathbf{z}, t)$ é canônica se, e somente se, a sua matriz Jacobiana satisfaz $\mathbf{M^T J M} = \mathbf{J}$. Uma matriz que satisfaz a condição anterior é chamada de *matriz simplética*.

11. Mostre que $|det\, \mathbf{M}| = 1$.

12. Considere duas funções continuas das coordenadas e momentos generalizados $g(q_k, p_k)$ e $h(q_k, p_k)$. O *parêntese de Poisson* de *g* com *h* é definido como:

$$\{g, h\} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right)$$

Verifique as seguintes propriedades os parênteses de Poisson:
(a)
$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$$
(b)
$$\dot{q}_j = \{q_j, H\}, \qquad \dot{p}_j = \{p_j, H\}$$
(c)
$$\{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q_i, q_j\} = 0$$
(d)
$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij},$$
onde H é o hamiltoniano. Se os parênteses de Poisson de duas quantidades é nulo, se diz que as quantidades *comutam*. Se os parênteses de Poisson de duas quantidades é igual a um, se diz que as quantidades são *canonicamente conjugadas*.
(e) Motre que qualquer quantidade que não dependa explicitamente do tempo e que comute com o hamiltoniano é uma constante do movimento do sistema. O formalismo dos parênteses de Poisson é de considerável importância na Mecânica Quântica.

13. Mostre que as componentes do vetor momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ satisfazem os seguintes parênteses de Poisson:

$$\{L_x, L_y\} = L_z \qquad \{L_y, L_z\} = L_x \qquad \{L_z, L_x\} = L_y$$

14. Resolver os problemas 7.1, 7.2, 7.3, 7.5, 7.8, 7.9, 7.10, 7.12 do livro do Nivaldo.

15. Resolver os problemas 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.8, 8.9, 8.10, 8.14, 8.15, 8.16, 8.17 do Nivaldo.